

Cours – Séquence n° 13 – FONCTIONS (V) :

primitives, équations différentielles

I- PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $y' = f$

Définitions

1. Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.
2. **Résoudre une équation différentielle**, c'est trouver toutes les fonctions qui sont solutions de cette équation.

Exemple

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 3y$.

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{3x}$ est une solution de (E).

$g = e^u$ avec $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = 3x$ u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $g' = u' e^u$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 3e^{3x}$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g' = 3 \times g(x)$
 Donc g vérifie l'équation différentielle (E). g est une solution de (E)

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Dire que F est **une primitive de f sur I** signifie que F est dérivable sur I pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Autrement dit, une primitive de la fonction f sur I est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + 2$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^x + 2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

En effet, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = f(x)$

Ainsi F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

- 1) Pour tout réel k , la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I .
- 2) Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration*

$$1) \forall x \in I \quad G(x) = F(x) + R, \quad R \in \mathbb{R}$$

• G est dérivable sur I , comme somme de fonction dérivable sur I (car F est une primitive de f sur I)

$$\forall x \in I \quad G'(x) = F'(x) + 0; \quad G'(x) = f(x)$$

2) Soit G une autre primitive de f sur I

• $G - F$ est une fonction dérivable sur I comme différence de fonction dérivable sur I

$$\forall x \in I \quad (G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\text{Donc il existe } R \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I \quad (G - F)(x) = R$$

$$\text{Donc } \forall x \in I \quad G(x) - F(x) = R \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \forall x \in I \quad G(x) = F(x) + R \in \mathbb{R}$$

Remarques

1. On dit que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.
2. L'équation différentielle $y' = f$ a pour solutions toutes les primitives de f sur I .

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant la condition $G(x_0) = y_0$, où x_0 et y_0 sont des réels donnés.

Démonstration

f est continue sur I , donc, d'après la propriété précédente, toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où F est une primitive de f sur I et $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Or, } G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0$$

$$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$$

Donc G est définie sur I par $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ ce qui définit la fonction G de façon unique.

Exemple

Vérifier que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (x - 1)e^x$ est une solution de l'équation différentielle $y' = xe^x$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x$.

En déduire toutes les primitives de h sur $\mathbb{R}$, puis la primitive de h qui vaut -2 en 0 .

• H est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 1)e^x = (1 + x - 1)e^x = xe^x$$

Donc H est bien solution de l'équation différentielle

• H est une solution de l'équation différentielle $y' = h$, donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de h sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = H(x) + R$

On cherche R tel que $G(0) = -2$

$$\Leftrightarrow H(0) + R = -2$$

$$\Leftrightarrow -1e^0 + R = -2$$

$$\Leftrightarrow -1 + R = -2$$

$$\Leftrightarrow R = -1$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = (x - 1)e^x - 1$$

II- FORMULAIRE DE PRIMITIVES

Primitives des fonctions usuelles :

Fonction f	Les primitives F	Intervalle(s) de validité
$f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$, constant)	$F(x) = kx + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2} x^2 + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3} x^3 + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$)	$F(x) = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Primitives et opérations sur les fonctions (u et v sont des fonctions dérivables sur I).

Fonction f	Une primitive F	Condition supplémentaire
$f = u + v$	$F = U + V$ (U et V primitives de u et v sur I)	
$f = \alpha \cdot u$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, constante)	$F = \alpha \cdot U$ (U primitive de u sur I)	
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = u' \times u^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$)	$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$	Si $n \leq -2, \forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = u' \sin(u)$	$F = -\cos(u)$	
$f = u' \cos(u)$	$F = \sin(u)$	
$f = u' \times e^u$	$F = e^u$	
$f = u' \times (v' \circ u)$	$F = v \circ u$	u dérivable sur I, "à valeurs" dans J et v dérivable sur J

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 2 \frac{x^4}{4} - 5 \frac{x^2}{2} + x + A, \quad A \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + x + A, \quad A \in \mathbb{R}$$

Exemple 2 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par $g(x) = e^{4x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} + \sin(3x+1)$.

Déterminer les primitives de g sur $\mathbb{R}^{++}$.

g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle admet des primitives G sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad G(x) = \frac{1}{4}e^{4x} + 2 \times 2\sqrt{x} - 3 \times \ln(x) + A, \quad A \in \mathbb{R}$$

$$G(x) = \frac{1}{4}e^{4x} + 4\sqrt{x} - 3\ln(x) + A, \quad A \in \mathbb{R}$$

Exemple 3 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (e^x - x)(e^x - 1)$.

Déterminer la primitive de h sur $\mathbb{R}$ telle que $H(0) = 3$.

h est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives H sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad R(x) = \underbrace{(e^x - 1)}_{u'(x)} \times \underbrace{(e^x - x)}_{u(x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = \frac{1}{2}(e^x - x)^2 + A, \quad A \in \mathbb{R}$$

$$\text{Or } H(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^0 - 0)^2 + A = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + A = 3$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = \frac{1}{2}(e^x - x)^2 + \frac{5}{2}$$

Exemple 4 Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = (x - \frac{1}{2})e^{x^2 - x + 4}$.

Déterminer la primitive de j sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exemple 5 Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par $k(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}$. Déterminer les primitives de k sur $\mathbb{R}^{++}$.

• k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle admet des primitives K sur $\mathbb{R}_+^*$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad k(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad K(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2+2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$$K(x) = \frac{-1}{2(x^2+2x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemple 6 Soit l la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par $l(x) = \frac{2}{(5-3x)^4}$. Déterminer les primitives de l sur $[2; +\infty[$.

• l est continue sur $[2; +\infty[$ donc elle admet des primitives L sur $[2; +\infty[$

• $\forall x \in [2; +\infty[\quad l(x) = 2 \times (5-3x)^{-4}$

$$L(x) = 2 \times (-3) \times (5-3x)^{-4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

• $\forall x \in [2; +\infty[\quad L(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times (5-3x)^{-3} + R, \quad R \in \mathbb{R}$

$$L(x) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{(5-3x)^3} + R, \quad R \in \mathbb{R}$$

$$L(x) = \frac{2}{9(5-3x)^3} + R, \quad R \in \mathbb{R}$$

Exemple 7 Soit m la fonction définie sur $] -\infty; \frac{3}{2}[$ par $m(x) = \frac{1}{3-2x} + x - 5$.

Déterminer les primitives de m sur $] -\infty; \frac{3}{2}[$.

• m est continue sur $] -\infty; \frac{3}{2}[$ donc m admet des primitives M sur $] -\infty; \frac{3}{2}[$

• $\forall x \in] -\infty; \frac{3}{2}[\quad m(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2}{3-2x} + x - 5$

• $\forall x \in] -\infty; \frac{3}{2}[\quad M(x) = \frac{-1}{2} \times \ln(3-2x) + \frac{1}{2}x^2 - 5x + R, \quad R \in \mathbb{R}$

avec $\forall x \in] -\infty; \frac{3}{2}[\quad 3-2x > 0$

III- ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $y' = ay + b$

$y' = ay \Leftrightarrow y' - ay = 0$
est appelée équation différentielle
linéaire du 1^{er} ordre à coefficients
constants sans 2nd membre
(ou homogène).

Propriété : résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Soit a un nombre réel non nul.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

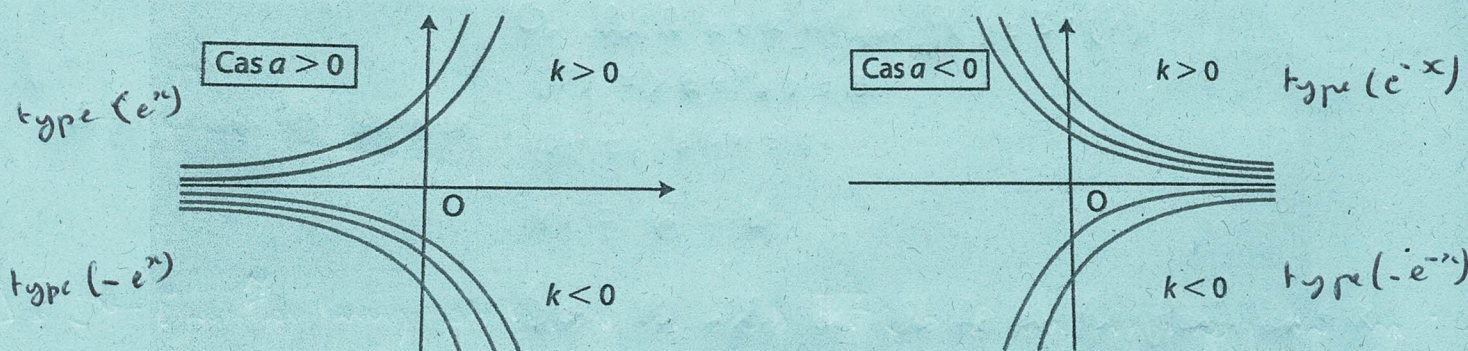
$x \mapsto ke^{ax}$, où k est une constante réelle.

Démonstration*

- ($\Leftarrow$) Soit k un nombre réel et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$.
On va montrer que la fonction f_k ainsi définie est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
 f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, f_k'(x) = kae^{ax} = a \times f_k(x)$.
Donc f_k est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- ($\Rightarrow$) Réciproquement, on va montrer que si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$, alors $f(x) = ke^{ax}$.
Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-ax}$.
 g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) \times e^{-ax} + f(x) \times (-ae^{-ax})$; soit $g'(x) = (f'(x) - af(x)) \times e^{-ax}$.
Or, comme la fonction f est une solution de $y' = ay$, alors $f'(x) = af(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0$.
Par conséquent, la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$ et on peut noter k la valeur de cette constante.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = k$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ke^{ax}$.

On peut conclure que les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ke^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Allure des courbes des fonctions solutions selon les signes de a et de k



Exemple 1 Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 2y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{2x}$
ou les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto ke^{2x}$ $k \in \mathbb{R}$

Exemple 2 Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 0$, puis déterminer la solution f telle que $f(4) = 1$.

$$(E) \Leftrightarrow 2y' = -3y$$

$$(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$$

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = R e^{-\frac{3}{2}x}$

On cherche R tel que $f(4) = 1$

avec $R \in \mathbb{R}$

$$f(4) = R e^{-\frac{3}{2} \times 4} = 1$$

$$\Leftrightarrow R e^{-6} = 1$$

$$\Leftrightarrow R = e^6$$

Donc la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^6 e^{-\frac{3}{2}x}$

$$\text{ou } (f(x) = e^{6 - \frac{3}{2}x})$$

$y' = ay + b \Leftrightarrow y' - ay = b$
est appelée équation différentielle
linéaire du 1^{er} ordre à coefficients
constants avec 2nd membre.

Propriété : résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Soit a et b deux nombres réels non nuls.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto k e^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

Démonstration

- On détermine d'abord une fonction constante g solution particulière de (E) : $y' = ay + b$.
 g étant une fonction constante, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0$.
 g est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = ag(x) + b$
 g est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 = ag(x) + b$
 g est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -\frac{b}{a}$
 Donc la fonction constante g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de (E).
- Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = af(x) + b$
 f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - g'(x) = af(x) - ag(x)$, car g est une solution de (E)
 f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (f - g)'(x) = a(f - g)(x)$
 f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$
 f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (f - g)(x) = k e^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$
 f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k e^{ax} + g(x)$, avec $k \in \mathbb{R}$
 f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $k \in \mathbb{R}$

Donc les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto k e^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Méthode systématique permettant de résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ **Exemple**Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' + 3y = 6$, et déterminer la solution dont la courbe passe par le point $A(0 ; 3)$.

Étapes	Mise en œuvre pour résoudre l'équation différentielle
1. On se ramène à une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.	Soit (E) : $2y' + 3y = 6$ $(E) \Leftrightarrow 2y' = -3y + 6$ $(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y + 3$
2. On détermine une solution particulière constante.	Soit g une fonction constante, solution particulière de (E) g est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\frac{3}{2}g(x) + 3 : (1)$ $(1) \Leftrightarrow 0 = -\frac{3}{2}g(x) + 3$ $(1) \Leftrightarrow g(x) = 2$
3. On détermine les solutions de l'équation homogène $y' = ay$.	Les solutions de l'équation homogène $y' = -\frac{3}{2}y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}e^{-\frac{3}{2}x}$, $R \in \mathbb{R}$
4. On déduit les solutions de l'équation initiale	Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Re^{-\frac{3}{2}x} + g(x)$, $R \in \mathbb{R}$ $f(x) = Re^{-\frac{3}{2}x} + 2$, $R \in \mathbb{R}$
5. On déduit la fonction vérifiant la condition demandée. ↳ par la méthode	On cherche $R \in \mathbb{R}$ tel que $f(0) = 3 : (2)$ $(2) \Leftrightarrow Re^0 + 2 = 3$ $(2) \Leftrightarrow R + 2 = 3$ $(2) \Leftrightarrow R = 1$ Donc la solution cherchée est la fonction $f \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} + 2$

Propriété : résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$

Soit a un nombre réel non nul et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto ke^{ax} + g(x), \text{ où } k \text{ est une constante réelle et } g \text{ est une solution particulière de l'équation différentielle.}$$

Démonstration

- Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution particulière de (E) : $y' = ay + f$.
- Soit h une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 h est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = ah(x) + f(x)$
 h est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) - g'(x) = ah(x) - ag(x)$, car g est une solution de (E)
 h est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (h - g)'(x) = a(h - g)(x)$
 h est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad h - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$
 h est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (h - g)(x) = ke^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$
 h est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = ke^{ax} + g(x)$, avec $k \in \mathbb{R}$

Donc les solutions de $y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ke^{ax} + g(x)$, avec $k \in \mathbb{R}$ et g une solution particulière de l'équation différentielle.

Méthode guidée permettant de résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$ Exemple

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + x^2$.

- Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de (E).

g est dérivable comme fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -x - \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R} \quad 2g(x) + x^2 = -x^2 - x - \frac{1}{2} + x^2, \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad 2g(x) + x^2 = g'(x)$$

Donc g est bien une solution de l'équation différentielle (E).

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène $y' = 2y$.

Les solutions de l'équation homogène $y' = 2y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} \quad x \mapsto R e^{2x}, R \in \mathbb{R}$

- En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = R e^{2x} + g(x), R \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = R e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$